المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

ثانية بكلوريا علوم تجريبية

نماذج للفروض المحروسة

فروض محروسة

سلاسل التمارين



الدورة الأولى

موسم 2020 / 2021



ثانية بكلوريا علوم فزيائية

التحضير للفرض المحروس

رقم 2

الدورة الأولى

موسم 2020 – 2021





واجب منزلي رقم 2 دورة I:

ثانوية الليمون

2020
2021

مستوى: ثانية باك علوم ← فوج: 2k+1

تمرين 1:

1°) أحسب النهايات

① $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$

② $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2+1}$

2°) نعتبر الدالة f بحيث:

$$\begin{cases} f(x) = x+\sqrt{x}+1 ; (x \geq 0) \\ f(x) = \sqrt[3]{1+x^2} ; (x < 0) \end{cases}$$

2°-1) أدرس قابلية اشتقاق f في $a=0$ على اليمين وعلى اليسار.

2°-2) إعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.

تمرين 2:

لتكن الدالة g المعرفة كما يلي:

$$\forall x \in [\tfrac{1}{2} ; +\infty[, \quad g(x) = x + \sqrt{2x-1}$$

1°) برهن أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J مع تحديد J ، ثم احسب: $\lim_{x \to +\infty} g^{-1}(x)$

2°) ضع جدول تغيرات g^{-1}.

3°) بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في 1 ثم أحسب $(g^{-1})'(1)$

4°) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x - g^{-1}(x) = 0$

5°) تحقق أن: $g^{-1}(x) = 1 + x - \sqrt{2x}$; $(\forall x \in J)$

6°) أحسب: $g^{-1}([\tfrac{1}{2} ; 1])$

(1)

*** الحل ***

تمرين 1) 1°) حساب ① $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$: مباشرة نجد: "$\frac{0}{0}$" ش.ع.م.

ولدينا:

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} = \frac{\sqrt[3]{x}^3 - 1^3}{(x^2-1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt{x}+1^2\right)}$$

$$= \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

اذا:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

حساب ② $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1}$: مباشرة نجد: "$\infty-\infty$" ش.ع.م.

ونكتب:

$$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1} = x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

بما أن: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ فإن: $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{6}$

اذا:

$$x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{6}}=+\infty$ اذا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x^{\frac{1}{6}}\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$

اذا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1}\right) = +\infty\times(-\infty) = \boxed{-\infty}$$

②

2°) 1) ق.ش على اليمين في $a=0$: لدينا : $f(0)=1$ و :

$$\lim_{x \to 0^{>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^{>}} \frac{(x+\sqrt{x}+1)-1}{x} = \lim_{x \to 0^{>}} \frac{x+\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق في 0 على اليمين.

$$\lim_{x \to 0^{<}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^{<}} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{<}} \frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0^{<}} \frac{x^2}{x\left(\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x \to 0^{<}} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}$$

$$= \frac{0}{3} = \boxed{0}$$

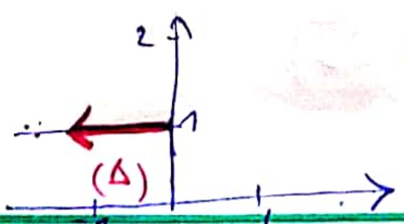
إذن f تقبل الاشتقاق في 0 على اليسار و : $f'_g(0)=0$

2°-2) تأويل هندسي :

(C_f) يقبل نصف مماس في A على اليسار معادلة :

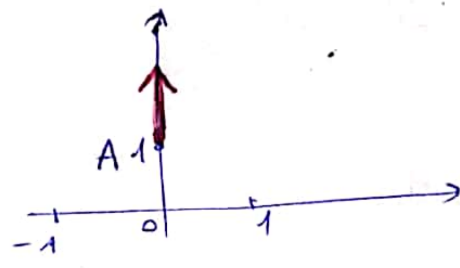
(Δ) $y = 0(x-0)+f(0)$ و $x \leq 0$

أي : $(\Delta): y=1$ و $x \leq 0$



حيث : $A(0;f(0))$ أي $A(0,1)$

③ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل كذلك نصف مماس (Δ) موجه نحو الأراتيب الموجبة (Δ) يوازي $((Oy))$ في النقطة: $A(0;1)$.



تمرين 2

$\forall x \in [\frac{1}{2};+\infty[\ ;\quad g(x) = x + \sqrt{2x-1}$

1) $x \longmapsto 2x-1$ متصلة وموجبة على $[\frac{1}{2};+\infty[$

اذن g دالة متصلة على $[\frac{1}{2};+\infty[$.

الدالة g ق.ش على $]\frac{1}{2};+\infty[$ ولدينا،

$$\forall x \in [\frac{1}{2};+\infty[\ ;\quad g'(x) = 1 + \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}$$

$$\forall x \in [\frac{1}{2};+\infty[\quad g'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$

اذن g تزايدية قطعا على المجال $[\frac{1}{2};+\infty[$.

وبالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال: $J = g([\frac{1}{2};+\infty[)$ ؛ ولدينا:

$$J = [g(\tfrac{1}{2}), \lim_{x\to+\infty} g(x)[= [\tfrac{1}{2};+\infty[$$

حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$ لدينا: g^{-1} متصلة، معرفة من $J = [\frac{1}{2};+\infty[$ نحو: $[\frac{1}{2};+\infty[$

4

إذن: $g^{-1}([\frac{1}{2};+\infty[) = [\frac{1}{2};+\infty[$

أي أن: $[g^{-1}(\frac{1}{2}); \lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x)[= [\frac{1}{2};+\infty[$

ومنه نستنتج أن: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty}$

2° جدول تغيرات g^{-1}:

g ↗ قطعا على $[\frac{1}{2};+\infty[$

إذن g^{-1} ↗ قطعا على $[\frac{1}{2};+\infty[$

x	$1/2$	$+\infty$
g^{-1}	$1/2$ ↗	$+\infty$

3° ملاحظة: g^{-1} قابلة للاشتقاق في 1 معناه أن الكتابة:

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))}$$

لها معنى

نبين أن: g^{-1} ق.ش في 1.

نحسب أولا $g^{-1}(1)$: نضع $\alpha = g^{-1}(1)$ إذن:

$\alpha \geq \frac{1}{2}$ و $g(\alpha) = 1$

$\alpha + \sqrt{2\alpha-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{2\alpha-1} = 1-\alpha$ و $1-\alpha \geq 0$

$\Rightarrow 2\alpha - 1 = 1 - 2\alpha + \alpha^2$ و $1-\alpha \geq 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$ و $1 \geq \alpha$

$\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$ إذن: $\alpha = \frac{4+2\sqrt{2}}{2}$ أو $\alpha = \frac{4-2\sqrt{2}}{2}$

أي أن: $\alpha = 2+\sqrt{2}$ أو $\alpha = 2-\sqrt{2}$

نعلم أن $\alpha \leq 1$ إذن $\alpha \neq 2+\sqrt{2}$

5

ومنه: $\alpha = 2 - \sqrt{2}$

اذن: $g^{-1}(1) = 2-\sqrt{2}$

وبما أن g ق.ش على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$ فإنها قش

في $g^{-1}(1)$ كما أن: g' لا تنعدم

(لأن: $g'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$)

اذن: g^{-1} تقبل الاشتقاق في $1=g(2-\sqrt{2})$

حساب: $(g^{-1})'(1)$:

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'(2-\sqrt{2})}$$

ولدينا:

$$g'(2-\sqrt{2}) = 1+\frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})-1}} = 1+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}$$

$$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

واذن:

$$(g^{-1})'(1) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4°) نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x-g^{-1}(x)=0$

$$x-g^{-1}(x)=0 \iff x = g^{-1}(x) \text{ و } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff g(x) = x \text{ و } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff x+\sqrt{2x-1} = x \text{ و } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff \sqrt{2x-1}=0 \text{ و } x \geq \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$ و $x \geq \frac{1}{2}$

إذن : $\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$

5°) ليكن x و y من المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{2y-1} = x$$

$$\Leftrightarrow 2y + 2\sqrt{2y-1} = 2x$$

$$\Leftrightarrow 2y - 1 + 2\sqrt{2y-1} + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y-1} + 1\right)^2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{2y-1} + 1\right| = \sqrt{2x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y-1} + 1 = \sqrt{2x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = -1 + \sqrt{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2y - 1 = 1 + 2x - 2\sqrt{2x}$$ (مربع الطرفين)

$$\Leftrightarrow 2y = 2 + 2x - 2\sqrt{2x}$$

$$\boxed{y = 1 + x - \sqrt{2x}}$$

إذن : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad g^{-1}(x) = 1 + x - \sqrt{2x}$

6°) نعلم أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

إذن : $g^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right)$ قطعة لأن g^{-1} متصلة

7

باستخدام تعبير g^{-1} نجد: $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(لاحظ أن: $g^{-1}([\frac{1}{2},+\infty[) = [\frac{1}{2},+\infty[$ إذن $g^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$)

ونعلم أن: $g^{-1}(1) = 2-\sqrt{2}$

إذن:

$$g^{-1}\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) = \left[\frac{1}{2};2-\sqrt{2}\right]$$

—— * * *fin* * * ——

واجب منزلي رقم 2 دورة 1

2020 / 2021

ثانوية الإدمون / مستوى PC(2+3)

[فوج : 2k]

I] حساب النهايات:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ ⓑ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[3]{x+1}}$

II] لتكن f الدالة بحيث:

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$

1- أ) حدد D_f ثم ادرس اتصال f على D_f.

1- ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس ق.ش f في 0 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

3) تحقق أن:

$(\forall x>-1);\ f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

4) ضع جدول تغيرات f.

5) بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو المجال $I=D_f$.

6) أحسب $f(1)$ ثم بين أن f^{-1} ق.ش في $f(1)$ وحدد $(f^{-1})'(f(1))$.

7) أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

الحل:

I] حساب النهاية ⓐ: مباشرة نجد: $\frac{0}{0}$ وهو ش.غ.م ولدينا:

$$\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{(4x-8)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-9)(\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4)}$$

$$=\frac{4(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4)}$$

اذن:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{4(\sqrt{x+7}+3)}{\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4}$$

$$=\frac{4\times 9}{4+4+4}=\frac{9}{3}=\boxed{3}$$

1) حساب النهاية ⓑ: مباشرة نجد $\frac{\infty}{\infty}$ (ش.غ.م)

ولدينا:

$$\frac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[6]{(x+1)^2}}=\sqrt[6]{\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}}$$

بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{x^2-2x}}{\sqrt[3]{x+1}}=1$$

II] $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$

1- أ)

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x+1\geq 0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x\geq -1\}=[-1,+\infty[$

لدينا: $x\mapsto x+1$ متصلة وموجبة على D_f.

اذن: f متصلة على D_f.

1- ب) بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-1=\boxed{+\infty}$

2) ق.ش f في 0:

لدينا: $f(0)=0$ و:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

$$=\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

اذا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{3}$$

وبالتالي $\boxed{f \text{ ق.ش في } 0}$.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل مماسا في النقطة ذات الأفصول 0

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} - 1 = x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} = x + 1$

$\Leftrightarrow y + 1 = (x+1)^3$

$\Leftrightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1$

اذن: $(\forall x \in J);\ f^{-1}(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

②

3) لكل x من $]-1,+\infty[$ لدينا: $x+1>0$ اذن f قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$

ولدينا: $(\forall x>-1);\ f'(x) = \left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right)'$

$= \dfrac{(x+1)'}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0$

4) بما أن: $(\forall x>-1),\ f'(x)>0$ فإن f تزايدية قطعا على D_f اذن:

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-1 \nearrow +\infty$

(نلاحظ أن -1 هو قيمة دنيا للدالة f)

5) بما أن f متصلة على D_f (سؤال 1-أ)) وتزايدية قطعا على D_f اذن تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال $J = f(D_f)$ نحو D_f.

6) لدينا: $f(1) = \sqrt[3]{2} - 1$

نطبق الخاصية:

$(f^{-1})'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)}$

بما أن f' ق.ش في 1

و $f'(1) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} \neq 0$

فإن: f^{-1} ق.ش في $f(1)$ ولدينا:

$(f^{-1})'(f(1)) = \dfrac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}} = \boxed{3\sqrt[3]{4}}$

7) نحدد أولا J:

$J = f([-1;+\infty[) = [f(-1); \lim_{+\infty} f[= [-1;+\infty[$

لكل x من J و y من D_f لدينا:

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$



سلسلة تمارين في الرياضيات / موسم : 2020-2021

مستوى ثانية باك علوم دورة I.

(2k+1) : خ.و.ج

f دالة عددية معرفة بالصيغة :

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

1- أ) أوجد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

1- ب) أحسب نهايات f عند محدات D_f.

2- أ) أثبت أن : $(\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[)$;

$$f'(x) = \frac{-1}{3(x-1)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}$$

2- ب) أدرس قابلية اشتقاق f في الصفر على اليسار.

2- ج) استنتج جدول تغيرات f.

3 - لتكن g قصور الدالة f على المجال $\mathbb{R}^-$.

3- أ) تحقق أن g تقبل دالة عكسية معرفة على $[0,1[$ نحو $\mathbb{R}^-$.

3- ب) أحسب $(g^{-1})(\frac{1}{2})$ ثم $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

3- ج) أحسب التعبير $g^{-1}(x)$.

..* fin *..

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

①

1-أ) ليكن x من $\mathbb{R}$.

$$x \in D_f \iff \left(\frac{x}{x-1} \geqslant 0 \text{ و } x - 1 \neq 0 \right)$$

لدينا جدول الاشارة:

x		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

$\geqslant 0$ $\geqslant 0$

اذن:

$$x \in D_f \iff x \in]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[$$

ومنه:

$$\boxed{D_f =]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[}$$

1-ب) لدينا:

$$D_f =]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[$$

4 محدات

محد مغلق

3 محدات مفتوحة.

عند المحدات المغلقة النهاية تساوي الصورة (لأن الدالة تكون معرفة)

اذن:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0) = \sqrt[3]{\frac{0}{0-1}} = \sqrt[3]{0} = \boxed{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} = \text{"} \frac{1}{0^+} \text{"} = \boxed{+\infty}$$

(لأن: $x > 1$ واذن $x - 1 > 0$)

ولدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \boxed{1}$ اذن:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{1}$$

2-أ) ملاحظة هامة: إذا كانت: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

فإن مجموعة تعريف f هي: $\{x \in \mathbb{R} ; g(x) \geqslant 0\}$

لكل x من $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ لدينا: $\frac{x}{x-1}>0$

اذن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ و:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)'=\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}-1}\times\left(\frac{x}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{-2}{3}}\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{3(x-1)^2\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

اذن:

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{3(x-1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}}$$

طريقة أخرى:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-1}}}=\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}=\frac{-1}{3(x-1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}$$

2- ب) قابلية الاشتقاق في الصفر على اليسار:

لدينا: $f(0)=0$ و:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

بما أن: $x<0$ فإن: $-x>0$ اذن: $-x=\sqrt[3]{(-x)^3}$

ومنه: $x=-\sqrt[3]{(-x)^3}$ بالتالي:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{-\sqrt[3]{(-x)^3}}\times\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}-\sqrt[3]{\frac{1}{(-x)^3}\times\frac{x}{x-1}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}-\sqrt[3]{\frac{x}{-x^3(x-1)}}$$

③

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{-x^2(x-1)}}$$

لدينا : $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{-x^2(x-1)} = "\frac{1}{-0^2 \times (-1)}" = "\frac{1}{0^2 \times 1}" = "\frac{1}{0^+}" = \boxed{+\infty}$

إذا : $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{-x^2(x-1)}} = \boxed{-\infty}$

ومنه : $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \boxed{-\infty}$

إذن g لا تقبل الاشتقاق في الصفر على اليسار.

ملاحظة : التأويل الهندسي لهذه النتيجة :

$(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة $A(0;f(0))$ أي في النقطة O .

نصف المماس موجه نحو الأعلى :



لأن : $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

$(-) \times (-) = (+) \uparrow$

2-ج) جدول التغيرات

نلاحظ أن : مقام $f'(x)$ موجب

والبسط : -1

إذن : $f'(x) < 0$

ومنه f تناقصية قطعا على D_f

x	$-\infty$ 0	1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $(-\infty)$ ‖	‖ $-$
f	1 ↘ 0	$+\infty$ ↘ 1

4) 3 - أ)

ملاحظة : g قصور f على $\mathbb{R}^-$

معناه : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ;\ g(x) = f(x)$.

الدالة : $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ متصلة على مجموعة تعريفها

وبالخصوص على $\mathbb{R}^-$. وبما أنها موجبة فإن : $g : x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$

متصلة على $\mathbb{R}^-$.

وبما أن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^-$ فإن g تناقصية قطعا

على $\mathbb{R}^-$ ، (لأن $g = f$) .

إذن g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $g(\mathbb{R}^-)$

نحو المجال : $\mathbb{R}^-$. لدينا :

$$g(\mathbb{R}^-) = f(]-\infty ; 0]) = [f(0) ; \lim_{x \to -\infty} f(x)[$$

$$= [0 ; 1[$$

---

3 - ب) حساب $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

نضع : $\alpha = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ لدينا :

$$\alpha = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow g(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} = 8 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} = 8$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} = 7 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow \boxed{g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{7}}$$

حساب : $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

نعلم أن : $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$ إذن : $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$

Scanné avec CamScanner

(5) لدينا : $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{7}$ نعوض في تعبير المشتقة :

$$g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{-1}{3\left(-\frac{1}{7}-1\right)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{-\frac{1}{7}}{-\frac{1}{7}-1}\right)^2}}$$

$$= \frac{-1}{3 \times \frac{64}{49} \sqrt[3]{\left(\frac{-1}{-8}\right)^2}} = \frac{-1}{3 \times \frac{64}{49} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}} = \frac{-1}{3 \times \frac{64}{49} \times \frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{49}{64} \times 4 = -\frac{49}{48}$$

اذن :

$$\boxed{(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{48}{49}}$$

(3 - ج) ليكن x من $[0;1[$ و y من $\mathbb{R}^-$ لدينا ،

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{y}{y-1}} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{y-1} = x^3 \Leftrightarrow y = x^3 y - x^3$$

$$\Leftrightarrow y(1-x^3) = -x^3$$

بما أن : $0 \leq x < 1$ فإن : $x^3 < 1$ اذن : $1 - x^3 \neq 0$

وبالتالي :

$$y = \frac{-x^3}{1-x^3} = \frac{x^3}{x^3-1}$$

ومنه فإن :

$$\boxed{\forall x \in [0;1[\; ; \; g^{-1}(x) = \frac{x^3}{x^3-1}}$$

— * * *fin* * * —



مدة الإنجاز : ساعة ونصف .

التمرين الأول :

1° أ احسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}}$ و $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^2-9}$

2° بسط التعبير : $A = \frac{(\sqrt[6]{4})^3 \sqrt[3]{\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{32}\sqrt{\sqrt{2}}}$

3° قارن العددين : $a = \sqrt[3]{7}$ و $b = \sqrt{5}$ (بدون آلة حاسبة)

4° نعتبر الدالة العدد h بحيث : $h(x) = 8x^{15} - 5x^9 + 2x^3 - 1$

أوجد الدالة الأصلية H للدالة h التي تحقق $H(-1) = \frac{3}{2}$

التمرين الثاني :

لتكن الدالة f بحيث : $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2+1}$

1° / حدد D_f ثم تحقق أن f دالة زوجية وأحسب $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ ،

2° / بين أن : $f(x) = (\sqrt{x^2+1} - 1)^2 - 2$; $(\forall x \in D_f)$

3° / لتكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0;+\infty[$.

3° - أ) بين أن : $g'(x) = 2x \times \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$ لكل x من I.

3° - ب) إستنتج رتابة g على I .

4° / بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

5° / بين أن g^{-1} تقبل الاشتقاق في $x_0 = 1 - 2\sqrt{2}$ (لاحظ أن : $g(1) = 1 - 2\sqrt{2}$)

6° / أحسب العدد : $(g^{-1})'(1 - 2\sqrt{2})$

7° / بين أن -2 هو قيمة دنيا للدالة f على D_f .

8° / حدد الفروع اللانهائية للدالة f .

—** fin **—

تصحيح نموذج رقم 1 للواجب رقم 2

الدورة I.

التمرين الأول

1° حساب النهاية :

$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}}$ مباشرة نجد F.I "$\infty-\infty$"

ولدينا: $\frac{7}{3} - \frac{6}{5} = \frac{35-18}{15} = \frac{17}{15}$

اذن: $\frac{7}{3} = \frac{6}{5} + \frac{17}{15}$ وبالتالي:

$$x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}} = x^{\frac{6}{5}+\frac{17}{15}} - x^{\frac{6}{5}} = x^{\frac{6}{5}}\left(x^{\frac{17}{15}} - 1\right)$$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{5}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{5}}\left(x^{\frac{17}{15}} - 1\right) = \boxed{+\infty}$

حساب: $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{x^2-9}$: مباشرة نجد $\frac{0}{0}$ (F.I) .

لديبا:

$$\frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{x^2-9} = \frac{\sqrt[3]{9x}^3 - 3^3}{(x^2-9)\left(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 3^2\right)}$$

$$= \frac{9(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9\right)}$$

اذن:

$$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{x^2-9} = \lim_{x\to3} \frac{9}{(x+3)\left(\sqrt[3]{9x}^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9\right)}$$

$$= \frac{9}{6\times\left(\sqrt[3]{27}^2 + 3\sqrt[3]{27} + 9\right)} = \frac{9}{6\times(3\times9)} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

2° تبسيط التعبير A:

$$A = \frac{\left(\sqrt[3\times2]{2^2}\right)^3 \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^3}}}{\sqrt[3]{2^5}\ \sqrt[2]{\sqrt[2]{2}}} = \frac{2\times\sqrt[2]{2}}{2^{\frac{5}{3}}\ 2^{\frac{1}{4}}}$$

$$= 2^{1+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}-\frac{1}{4}} = 2^{1+\frac{6-20-3}{12}} = 2^{1-\frac{17}{12}}$$

$$= 2^{-\frac{5}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2^5}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[12]{32}}}$$

3° نقارن: $a = \sqrt[3]{7}$ و $b = \sqrt[2]{5}$

لدينا 6 مضاعف مشترك لـ 3 و 2 ،

$a = \sqrt[3]{7} = \sqrt[2\times3]{7^2} = \sqrt[6]{49}$

و $b = \sqrt[2]{5} = \sqrt[2\times3]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

بما أن: $125 > 49$ فإن: $\boxed{b > a}$

4° نحسب الدالة الأصلية H بحيث: $H(-1) = \frac{3}{2}$

الدوال الأصلية لـ h تكتب:

$$H : x \mapsto \frac{8}{16}x^{16} - \frac{5}{10}x^{10} + \frac{2}{4}x^4 - x + k$$

اذن: $H(x) = \frac{x^{16}}{2} - \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^4}{2} - x + k$

لدينا: $H(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1) + k = \frac{3}{2}$

اذن: $\frac{1}{2} + 1 + k = \frac{3}{2}$ اذن $\frac{3}{2} + k = \frac{3}{2}$

ومنه $k = 0$ وبالتالي: $\boxed{H(x) = \frac{x^{16}}{2} - \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^4}{2} - x}$

التمرين الثاني

1° $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2+1}$

لدينا: $x^2+1 > 0$ لكل x من IR.

اذن: $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(-x) = (-x)^2 - 2\sqrt{(-x)^2+1}$
$= x^2 - 2\sqrt{x^2+1} = f(x)$

اذن $\boxed{f \text{ دالة زوجية}}$

حساب: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$:

مباشرة نجد (F.I) "$\infty - \infty$"

ولدينا: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(x^2 - 2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

اذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(x - 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$= "+\infty\times(+\infty - 2)" = \boxed{+\infty}$

(لأن: $|x| = x$)

في حالة: $x\to-\infty$ فإن: $x<0$ اذن $|x| = -x$

وبالتالي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 + 2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty} x\left(x + 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = "-\infty\times(-\infty)"$

$= \boxed{+\infty}$

2

وبالتالي:

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

/2° ليكن x من D_f ، لدينا:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2-2$$
$$=\sqrt{x^2+1}^2-2\sqrt{x^2+1}+1-2$$
$$=x^2+1-2\sqrt{x^2+1}-1$$
$$=x^2-2\sqrt{x^2+1}=f(x)$$

اذن:

$$(\forall x\in D_f)\quad f(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2-2$$

/3° لتكن g قصور f على $I=[0,+\infty[$

اذن:

$$\forall x\in[0,+\infty[\,,\quad g(x)=x^2-2\sqrt{x^2+1}$$

3°- أ) بما أن:

$$(\forall x\in I)\;;\quad x^2+1>0$$

فإن: g ق.ش على I و لكل x من I:

$$g'(x)=\left(x^2-2\sqrt{x^2+1}\right)'$$
$$=2x-2\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

اذن:

$$g'(x)=2x\times\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

/3°- ب) لدينا:

$$g'(x)=0 \iff 2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=0$$
$$\iff \left(x=0 \text{ أو } \sqrt{x^2+1}-1=0\right)$$
$$\iff \left(x=0 \text{ أو } x^2=0\right) \iff x=0$$

ومنه جدول تغيرات g:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	-2 ↗	$+\infty$

ملاحظة: لدينا: $(\forall x\in I),\; x^2+1\geq 1$

اذن: $(\forall x\in I);\; \sqrt{x^2+1}-1\geq 0$

وبالتالي اشارة $g'(x)$ هي نفس اشارة x.

/4° $x\mapsto x^2+1$ متصلة وموجبة على I

اذن $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ متصلة على I

ومنه g متصلة على I كفرق دالتين متصلتين.

وبما أن g تزايدية قطعا على I فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال

$$J=g(I)=\left[g(0)\,;\,\lim_{+\infty} g\right[$$

$$J=[-2\,;+\infty[$$

/5° يكفي أن نبين أن $g'\left(g^{-1}(1-2\sqrt{2})\right)\neq 0$

بما أن: $g(1)=1-2\sqrt{2}$

فإن: $1=g^{-1}(1-2\sqrt{2})$

اذن: $g'\left(g^{-1}(1-2\sqrt{2})\right)=g'(1)$

ونعلم أن:

$$g'(x)=\frac{2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

اذن:

$$g'(1)=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\neq 0$$

اذن: g^{-1} ق.ش في $1-2\sqrt{2}$

/6° نعلم أن:

$$(g^{-1})'(x_0)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x_0)\right)}$$

اذن:

$$(g^{-1})'(1-2\sqrt{2})=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(1-2\sqrt{2})\right)}$$
$$=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}^2-1^2)}$$
$$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اذن:

$$(g^{-1})'(1-2\sqrt{2})=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3

7/ نعلم أن: $f(0) = -2$ اذن -2 هو قيمة للدالة f.

<u>نبين أنها دنيا</u>: نعلم أن لكل x من D_f:

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 - 2$$

اذن:

$$f(x) - (-2) = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 \geqslant 0$$

اذن:

$$(\forall x \in D_f) : \quad f(x) \geqslant -2$$

ومنه $f(0) = -2$ هي قيمة دنيا لـ: f على D_f

8/ <u>الفروع اللانهائية لـ: $(\mathscr{C}_f)$</u>:

نعلم أن:

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ولدينا:

$$\frac{f(x)}{x} = x - 2\frac{|x|}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

اذن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2\frac{x}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

(في هذه الحالة $|x| = x$ لأن $x > 0$)

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

وبالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

— * fin * —



ثانوية الليمون — فرض محروس رقم 2 [نموذج 2]

دورة I / 2020 - 2021 / ساعة ونصف

تمرين 1 :

① أحسب النهايتين :
$$\lim_{x \to 2} \frac{2 - \sqrt[3]{4x}}{3x - 6}$$
و :
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x}$$

② قارن العددين : $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[5]{2}$ (بدون آلة حاسبة)

③ نعتبر الدالة h بحيث : $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

3-أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة h في 1 على اليمين ثم -1 على اليسار.

3-ب) اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.

تمرين 2 :

f دالة عددية بحيث :
$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$$

1°/ حدد D_f ثم احسب النهايات عند محداته.

2°/ أدرس قابلية اشتقاق f في 2 على اليمين واعط تأويلا هندسيا.

3°/ أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارتها.

4°/ بين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا ثم حدد وضع $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمقاربه المائل.

5°/ لتكن g قصور f على المجال $I = [2;+\infty[$

5°-أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة

إلى مجال J : مع تحديد J .

5 - ب) أنشئ في نفس المعلم كلا من منحنى f و g^{-1} .

/6° أحسب : $g\left(\frac{9}{4}\right)$.

/7° بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في $\frac{5}{2}$ ، ثم

أحسب : $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$

— ** fin ** —

ملاحظة : /3° نجد : $f'(x) = 1 - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

f' سالبة على المجال : $]2;+\infty[$

f' موجبة على المجال : $]-\infty;0[$

/7° نجد : $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

(1) غ

ثانوية الليمون : تصحيح النموذج 2 للفرض الثاني.

موسم : 2020-2021 - الدورة الأولى.

تمرين 1 : (1) حساب النهاية : $\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{4x}}{3x-6}$

مباشرة نجد : "$\frac{0}{0}$" وهي ش.غ.م ولدينا :

$$\frac{2-\sqrt[3]{4x}}{3x-6}=\frac{2^3-\sqrt[3]{4x}^3}{(3x-6)\left(2^2+2\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}^2\right)}$$

$$=\frac{4(2-x)}{3(x-2)\left(4+2\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}^2\right)}$$

$$=\frac{-4(x-2)}{3(x-2)\left(4+2\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}^2\right)}$$

$$=\frac{-4}{3\left(4+2\sqrt[3]{4x}+(\sqrt[3]{4x})^2\right)}$$

اذن :

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{4x}}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{-4}{3\left(4+2\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}^2\right)}$$

$$=\frac{-4}{3\left(4+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}^2\right)}=\frac{-4}{3\times(4\times 3)}=\boxed{\frac{-1}{9}}$$

حساب : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x}$ مباشرة نجد : "$\frac{+\infty}{-\infty}$" ش.غ.م.

ونكتب ما يلي : بما أن $x\to-\infty$ فإن : $x<0$

اذن : $-x>0$ ومنه : $-x=\sqrt[3]{(-x)^3}$

اذن :

$$x=-(-x)=-\sqrt[3]{(-x)^3}=-\sqrt[3]{-x^3}$$

و :

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x}=\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{-\sqrt[3]{-x^3}}=-\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{-x^3}}$$

$$= -\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

وبما أن: $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3} = 0$ فإن:

إذا: $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x} = \boxed{0}$$

ملاحظة: ينبغي الانتباه إلى اشارة الأساس عند التعامل مع الجذر من الرتبة n. مثلا : الكتابة :

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ نستعملها بعد التأكد من أن $x \geq 0$.

لذا ينبغي اجتناب الكتابة : $\sqrt[5]{(-3)^2} = (-3)^{\frac{2}{5}}$

اذا كان $a \geq 0$ فإن: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

اذا كان $a \leq 0$ فإن: $\sqrt[n]{a^{2m}} = (-a)^{\frac{2m}{n}}$

اذا كانت اشارة a مجهولة نستعمل القيمة المطلقة.

2 نقارن $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[5]{2}$: 15 مضاعف لـ 3 و 5 .

ولدينا : $\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{3^5} = \sqrt[15]{243}$ و $\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{8}$

بما أن : $8 < 243$ فإن: $\boxed{\sqrt[5]{2} < \sqrt[3]{3}}$

3 $h(x) = \sqrt{x^2-1}$; $h(1) = 0$

3 - أ) قابلية الاشتقاق في 1 على اليمين: ليكن $1 < x$

لدينا : $\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}}$

3

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{x-1} = "\frac{2}{0^+}" = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \boxed{+\infty}$$

ومنه: h لا تقبل الاشتقاق في 1 على اليمين.

قابلية الاشتقاق في -1 على اليسار: لدينا: $h(-1) = 0$

ولكل $x < -1$ لدينا:

$$\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1} \times \sqrt{x^2-1}}{(x+1) \times \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x^2-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

إذن:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= "\frac{-1-1}{\sqrt{0}}" = "\frac{-2}{0^+}" = \boxed{-\infty}$$

وبالتالي h لا تقبل الاشتقاق في -1 على اليسار.

3 ـ ب) تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأعلى في النقطة $A(1;0)$

ونصف مماس موجه نحو الأعلى في النقطة $B(-1;0)$.

4

تمرين 2 :

$$f(x) = x+1-\sqrt{x^2-2x}$$

1° ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2-2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) \geq 0$$

x		0		2	
$x(x-2)$	+	0	−	0	+

اذن :

$$D_f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

النهايات عند المحدات :

المحدات : هي : $-\infty$ ؛ 2^+ ؛ 0^- و $+\infty$

نكتفي بحساب النهاية عند المحدات المفتوحة : $+\infty$ و $-\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2-2x = +\infty$ (نهاية الحد الذي له أكبر درجة)

اذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{x^2-2x} = -\infty$ ومنه :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+1) - \sqrt{x^2-2x} = \boxed{-\infty}$$

مباشر نجد :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = "\infty - \infty"$ وهو ش.غ.م

ولدينا :

$$x+1-\sqrt{x^2-2x} = \frac{(x+1-\sqrt{x^2-2x})(x+1+\sqrt{x^2-2x})}{(x+1+\sqrt{x^2-2x})}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - x^2 + 2x}{x+1+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{4x+1}{x+1+\sqrt{x^2-2x}}$$

(5)

$$\frac{\cancel{x}\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}$$

اذن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{4+0}{1+0+\sqrt{1}}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

/2° قابلية الاشتقاق في 2 على اليمين: لدينا: $f(2)=3$

و:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x+1-\sqrt{x^2-2x}-3}{x-2}$$

$$=\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=1-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}$$

$$=1-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

$$=1-\sqrt{\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}}$$

$$=1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

x على يمين 2 اذن:
$x-2>0$
ومنه: $x-2=\sqrt{(x-2)^2}$

بما أن: $\lim_{x\to 2^>}\frac{2}{x-2}=\text{"}\frac{2}{0^+}\text{"}=\boxed{+\infty}$ فإن:

$$\lim_{x\to 2^>}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^>}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=\text{"}1-(+\infty)\text{"}=\boxed{-\infty}$$

6

إذن: f لا تقبل الاشتقاق في 2 على اليمين.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأسفل ↓ في النقطة: $M(2;3)$

/3° الدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها ما عدا النقط التي تنعدم فيها: إذن: $]-\infty,0[\cup]2;+\infty[$ هي مجموعة تعريف f'، ولدينا:

$$\forall x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[,\quad f'(x)=\left(x+1-\sqrt{x^2-2x}\right)'$$

$$=1-\frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1-\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

إذن: $$\boxed{f'(x)=1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}}$$

لدينا: $f'(x)=1+\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}$ إذا كان: $x<0$ فإن: $x-1<-1$

إذن: $x-1<0$ ومنه: $1-x>0$ إذن: $\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}>0$ وبالتالي:

$f'(x)>0$ لكل $x<0$.

ليكن $x>2$: أحد العبارتين $f'(x)\geqslant 0$ أو $f'(x)<0$ صحيحة

لدينا:

$$f'(x)<0\iff 1+\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}<0$$

$$\iff 1<\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\iff\sqrt{x^2-2x}<x-1$$

7

$\Leftrightarrow x^2-2x < x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0<1$

وبما أن العبارة $(0<1)$ صحيحة فإن العبارة $f'(x)<0$ صحيحة

خلاصة:

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ ////// $-$

/4° نذكر أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ولدينا:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1-\sqrt{x^2-2x}}{x} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= 1+\frac{1}{x}-\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

$|x| = -x$ لأن: $x\to-\infty$. إذن: $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x}$

ومنه:

$$\frac{f(x)}{x} = 1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1+0+\sqrt{1} = \boxed{2}$$

لدينا:

$$f(x)-2x = x+1-\sqrt{x^2-2x}-2x$$

$$= (1-x)-\sqrt{x^2-2x}$$

$$= \frac{(1-x)^2-\sqrt{x^2-2x}^{\,2}}{(1-x)+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \frac{1-2x+x^2-x^2+2x}{1-x+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{1}{1-x+\sqrt{x^2-2x}}$$

8

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} x^2-2x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$

اذن: $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right) = "\frac{1}{+\infty}" = 0$

وبالتالي المستقيم الذي معادلته: $(\Delta): y = 2x$
مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

الوضع النسبي لـ: $(\mathscr{C}_f)$ و (Δ): نحدد اشارة $f(x)-y$:

$$f(x)-y = x+1-\sqrt{x^2-2x}-2x$$
$$= 1-x-\sqrt{x^2-2x}$$

نلاحظ أن هذا التعبير لا ينعدم، لأن:

$$f(x)-y=0 \Leftrightarrow 0=1-x-\sqrt{x^2-2x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}=1-x$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x=1-2x+x^2 \Leftrightarrow 0=1$$

وهذا مستحيل اذا: إمّا $f(x)-y>0$

وإما: $f(x)-y<0$

نعوض مثلا بـ: $x=0$ فنجد: $f(0)-y=1>0$

اذن: $f(x)-y>0$ وبالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يوجد فوق (Δ) (بجوار $-\infty$)

9

5°/ : g قصور f على المجال $I=[2,+\infty[$

يعني أن : $\forall x \in I=[2,+\infty[\ ,\ g(x)=x+1-\sqrt{x^2-2x}$

5°- أ) الدالة $x \longmapsto x^2-2x$ متصلة وموجبة على I.

اذن : $x \longmapsto \sqrt{x^2-2x}$ متصلة على I.

ومنه : g متصلة على I (لأنها فرق دالتين متصلتين)

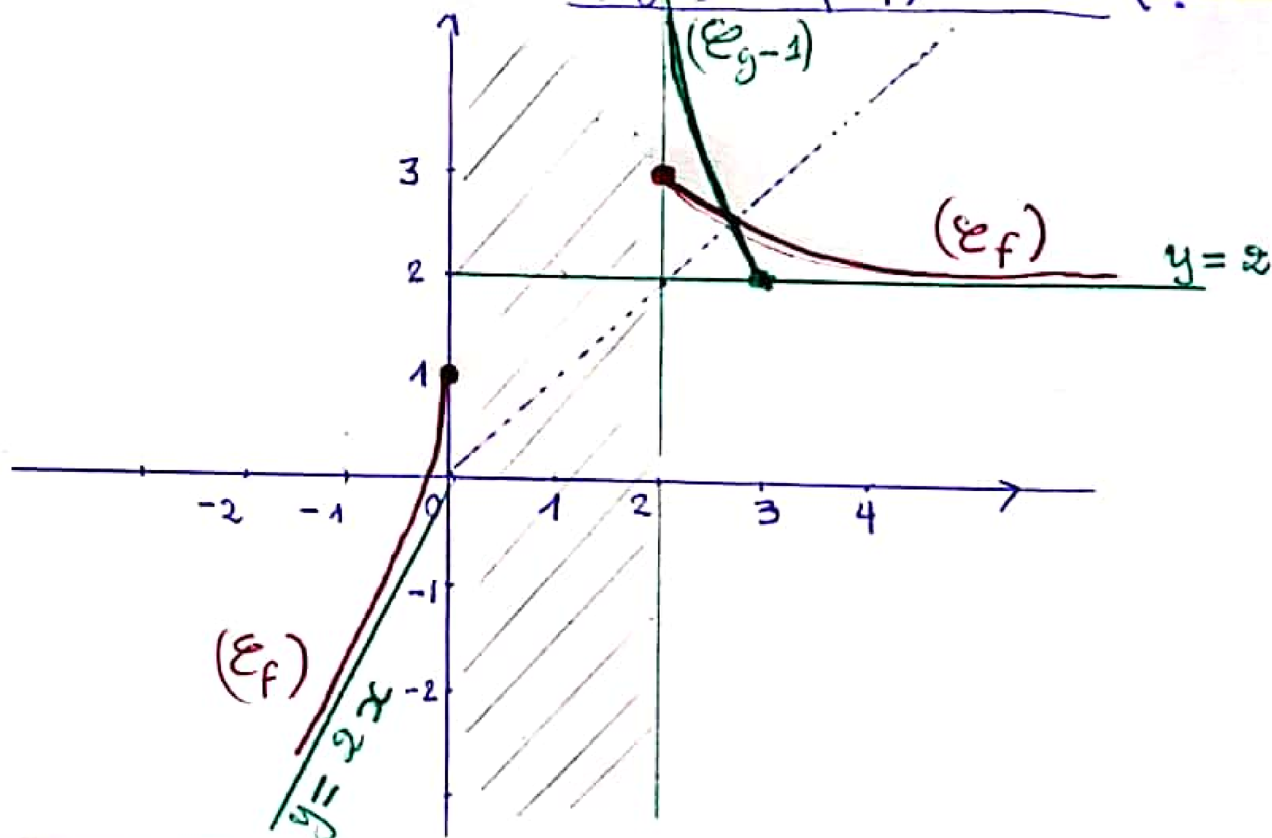
رتابة g هي رتابة f.

f تناقصية قطعا على I (لأن $f'(x)<0$) اذن g تناقصية قطعا على I.

نستنتج أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على $J=g(I)$

ولدينا :
$$J=g([2,+\infty[)=]\lim_{+\infty} g\ ;\ g(2)]$$
$$=]2;3]$$

5- ب) انشاء $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$:



Scanné avec CamScanner

10

◄ لإنشاء $(\mathcal{C}_f)$: اعتمدنا على $f(0)=1$ و $f(2)=3$

ثم المقارب الأفقي : نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

اذن المستقيم : $(D): y=2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

ونعلم أن: $(\Delta): y=2x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

وأن $(\mathcal{C}_f)$ يوجد فوق (Δ).

◄ إنشاء $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$: نرسم أولا المنصف الأول للمعلم: $y=x$

ثم نرسم مماثل $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لهذا المستقيم.

6°/ حساب : $g\left(\frac{9}{4}\right)$:

$$g(x) = x+1-\sqrt{x^2-2x}$$

$$g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4}+1-\sqrt{\frac{81}{16}-2\times\frac{9}{4}} = \frac{13}{4}-\sqrt{\frac{81-72}{16}}$$

$$= \frac{13}{4}-\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{13}{4}-\frac{3}{4} = \frac{10}{4}$$

اذن: $\boxed{g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{5}{2}}$

ملاحظة : الهدف من هذا السؤال هو حساب $g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

خاصية : $\boxed{f(a)=b \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)}$

لدينا : $g\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{5}{2}$ اذن : $\boxed{\frac{9}{4} = g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)}$

11

70/ قابلية الاشتقاق في $\frac{5}{2}$.

نطبق الخاصية:

$$(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$$

والتي تكون ممكنة عندما يكون $g'(g^{-1}(x_0)) \neq 0$

لدينا:

$$(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{g'\left(\frac{9}{4}\right)}$$

(لأن: $\frac{9}{4} = g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$)

ولدينا:

$$g'(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$g'\left(\frac{9}{4}\right) = 1 + \frac{1-\frac{9}{4}}{\sqrt{\frac{81}{16}-\frac{18}{4}}} = 1 + \frac{-5}{4} \times \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

بما أن: $g'\left(\frac{9}{4}\right) \neq 0$ فإن g^{-1} ق.ش في $\frac{5}{2}$.

ونجد:

$$(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

-+* fin *+-

ثانوية الليمون — واجب محروس رقم 2 من الدورة الأولى موسم: 2020 - 2021

مستوى: ثانية باك علوم — $2PC_2$ [2k+1] — (A)

تمرين 1 (4ن)

1° أحسب: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+5} - 3x$ و $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8}$ — 2ن

2° بسط التعبير: $A = \frac{\sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[3]{8}}{2\sqrt[3]{125} - 6\sqrt[5]{32}}$ — 1ن

3° لتكن H دالة أصلية الدالة: $h : x \mapsto 12x^5 - 3x^2 + 4x - 5$
حدد H علما أن: $H(1) = \frac{1}{2}$. — 1ن

تمرين 2 (16ن)

نعتبر الدالة f بحيث: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

1° - أ) تحقق أن: $D_f =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$ — 1ن

1° - ب) أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، — 1ن

2° - أ) أدرس قابلية اشتقاق f في 3 على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا. — 1ن

2° - ب) أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليسار ثم أعط تأويلا هندسيا. — 1ن

3° - أ) بين أن: $(\forall x \in D_f - \{0; 3\})\ ;\ f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$ — 1ن

3° - ب) ضع جدول تغيرات f على D_f. — 2ن

4 - أ) اعط معادلة المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$. — 2ن

4 - ب) اعط معادلة المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$. — 2ن

5° / أرسم $(\mathcal{C}_f)$. — 2ن

6° / لتكن g قصور الدالة f على المجال: $I = [3 ; +\infty[$.

6° - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحو I. — 1ن

6° - ب) أحسب $g(4)$ و $g'(4)$. — 1ن

6° - ج) بين أن: $(g^{-1})'(2) = \frac{4}{5}$ — 1ن

— انتهى —

ثانوية الليمون 2021-2020

تصحيح الواجب المحروس رقم 2 دورة I

فك 2 فوج [2k+1] (A)

تمرين 1

1° حساب: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+5} - 3x$

مباشرة نجد "$\infty-\infty$" وهو (ش.غ.م)

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+5} - 3x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^3}} - 3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^3}} - 3\right)$$

$$= "+\infty \times (\sqrt[3]{1+0}-3)"$$

$$= "+\infty \times (-2)" = \boxed{-\infty}$$

حساب: $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$. مباشرة نجد: "$\frac{0}{0}$" وهو (ش.غ.م) ولدينا:

$$\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \frac{\sqrt[3]{x}^3 - 2^3}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2^2)}$$

$$= \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

اذا:

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{8}^2+2\sqrt[3]{8}+4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

2° نبسط:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[3]{8}}{2\sqrt[3]{125} - 6\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[4]{64}\times 2}{2\times 5 - 6\times 2}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{8^2}\times 2}{-2} = -\sqrt[2]{8} = -\sqrt{8} = \boxed{-2\sqrt{2}}$$

3° الدوال الأصلية للدالة:

$h: x \mapsto 12x^5 - 3x^2 + 4x - 5$

تكتب على شكل:

$$H: x \mapsto \frac{12}{6}x^6 - \frac{3}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - 5x + k \quad (k\in\mathbb{R})$$

اذا:

$$H(x) = 2x^6 - x^3 + 2x^2 - 5x + k$$

(حيث: $k\in\mathbb{R}$)

اذا كان: $H(1) = \frac{1}{2}$

فان:

$$\frac{1}{2} = 2 - 1 + 2 - 5 + k$$

$$\frac{1}{2} = -2 + k$$

اذا: $k = \frac{5}{2}$ ومنه:

$$\boxed{H(x) = 2x^6 - x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{5}{2}}$$

تمرين 2

$$f(x) = \sqrt{x^2-3x}$$

1°-أ ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$x \in D_f \iff x(x-3) \geq 0$$

x	0		3	
$x(x-3)$	+ 0	−	0	+

$$\boxed{D_f =]-\infty; 0] \cup [3; +\infty[}$$

1°-ب لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x} = \boxed{+\infty}$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x} = \boxed{+\infty}$$

لأن:

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2-3x = \lim_{|x|\to+\infty} x^2 = +\infty$$

2°-أ قابلية الاشتقاق في 3 على اليمين:

لدينا: $f(3) = 0$ و:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x-3}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{x(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2-3x}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{x}{\sqrt{x^2-3x}} = "\frac{3}{0^+}" = \boxed{+\infty}$$

اذا f غير قابلة للاشتقاق في 3 على اليمين

◂ تأويل هندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في النقطة ذات الأفصول 3 ؛ يوازي محور الأراتيب وموجه نحو الأعلى.

2°- ب) ق.ش في 0 على اليسار:

لدينا: $f(0)=0$ و:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-3)}{x\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\text{"}\frac{-3}{0^+}\text{"}=\boxed{-\infty}$$

اذن: f لا تقبل الاشتقاق في 0 على اليسار

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس ↑ موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول 0. (النقطة O)

3°- أ) لكل x من $D_f-\{0;3\}$

لدينا: $x^2-3x>0$

اذن f ق.ش على $D_f-\{0;3\}$

و:

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x)'}{2\sqrt{x^2-3x}}=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

3- ب) تغيرات f على D_f:

اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة البسط $2x-3$

اذن:

x	$-\infty$	0	3/2	3	$+\infty$
$2x-3$	−		0	+	
$f'(x)$	−	‖ ////	////	////‖	+

ومنه جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	$(-\infty)$‖	////	‖$(+\infty)$	+	
f	$+\infty$	↘	0	////	0	↗	$+\infty$

4- أ) معادلة المقارب المائل بجوار $+\infty$:

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) نحسب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}} \quad \left(\text{لأن: } |x|=x,\ x\to+\infty\right)$$

$$=\boxed{1}=a \quad \left(\text{لأن: } \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)=1\right)$$

نحسب: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ مباشرة

نجد: "$\infty-\infty$" (F.I) ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}=\frac{-3}{2}=b$$

اذن: $y=x-\frac{3}{2}$ هي معادلة المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

4- ب) معادلة المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

و:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}$$

$$=\boxed{-1}=a \quad (\text{لأن } |x|=-x)$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2(1-3/x^2)}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}} - x}$$

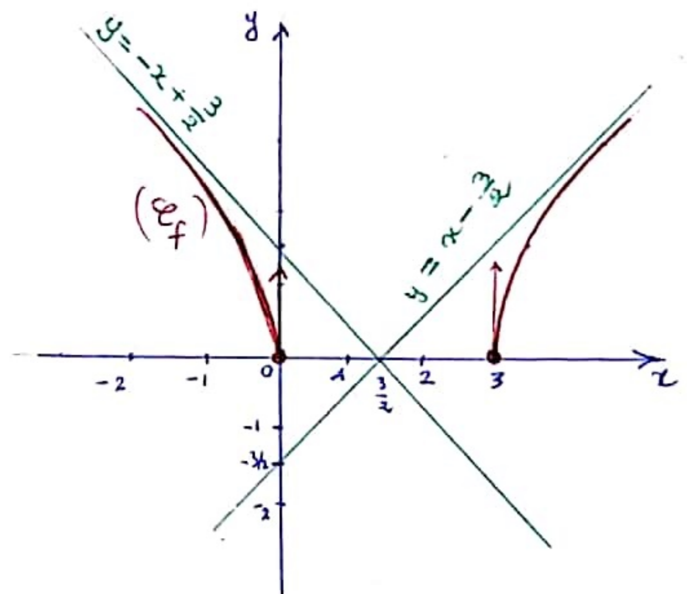
بما أن: $x \to -\infty$ فإن: $x<0$ إذا: $|x| = -x$ ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1} = \frac{-3}{-1-1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

إذا: $y=-x+\frac{3}{2}$ هي المعادلة المطلوبة

5/ انشاء (C_f).



6/ g قصور f على $I=[3,+\infty[$

يعني أن: $\forall x\in[3,+\infty[;\ g(x)=\sqrt{x^2-3x}$

(خاصيات g هي نفسها خاصيات f)

6-أ) الاتصال: الدالة $x\mapsto x^2-3x$ متصلة وموجبة على I إذا:

$g: x\mapsto\sqrt{x^2-3x}$ متصلة على I.

الرتابة: $g=f$. تزايدية قطعا على I

إذا: g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على $J=g(I)$ نحو I.

6-ب) حساب $g(4)$:

$$g(4)=\sqrt{4^2-3\times4}=\sqrt{4}=\boxed{2}$$

حساب $g'(4)$:

لدينا:

$$g'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

إذا:

$$g'(4)=\frac{8-3}{2\times\sqrt{4}}=\boxed{\frac{5}{4}}$$

6-ج) نعلم أن:

$g(4)=2$ إذا: $4=g^{-1}(2)$

نطبق الخاصية:

$$(g^{-1})'(x_0)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$$

نجد:

$$(g^{-1})'(2)=\frac{1}{g'(g^{-1}(2))}$$

$$=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{\frac{5}{4}}$$

إذا:

$$\boxed{(g^{-1})'(2)=\frac{4}{5}}$$

ملاحظة: يمكن أيضا تطبيق الخاصية:

$$(g^{-1})'(g(x_0))=\frac{1}{g'(x_0)}$$

فنكتب:

$$(g^{-1})'(2)=(g^{-1})'(g(4))$$

$$=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

— ... —

تذكير: معادلة المقارب المائل تكتب على شكل:

$(\Delta):\ y=ax+b$

لتحديد a نحسب: $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$

لتحديد b نحسب: $b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)$

ثانوية الليمون — واجب محروس رقم 2 من الدورة الاولى — موسم: 2020-2021

مستوى: ثانية باك علوم — 2PC₂ [2k+1] — (B)

تمرين 1 (04ن)	
2ن	1° أحسب: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+4}-5x$ و $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{3x}-3}{x-9}$
1ن	2° بسط التعبير: $B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{16}\times\sqrt{4}}}{\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}}$
1ن	3° لتكن G دالة أصلية للدالة: $g: x \mapsto 7x^6-8x^3+3x-1$ حدد G علما أن: $G(1)=\frac{3}{4}$
تمرين 2 (16ن)	نعتبر الدالة f بحيث: $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$
1ن	1° - أ) تحقق أن: $D_f =]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$.
1ن	1° - ب) أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
1ن	2° - أ) أدرس قابلية اشتقاق f في 4 على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا.
1ن	2° - ب) أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليسار ثم أعط تأويلا هندسيا.
1ن	3° - أ) بين أن: $(\forall x\in D_f-\{0;4\});\ f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$
2ن	3° - ب) ضع جدول تغيرات f على D_f .
2ن	4° - أ) اعط معادلة المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$.
2ن	4° - ب) اعط معادلة المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.
2ن	5° / أرسم $(\mathcal{C}_f)$.
	6° / لتكن g قصور f على المجال: $I=[4;+\infty[$.
1ن	6° - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحو: I .
1ن	6° - ب) أحسب: $g(5)$ و $g'(5)$.
1ن	6° - ج) بين أن: $(g^{-1})'(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{3}$

— انتهى —

ثانوية اليمون — تصحيح الواجب رقم 2 دورة I — ع
ذكر 2 أفوج : 2k+1] (2020/2021) (B)

تمرين 1: 1° حساب النهاية

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+4} - 5x$$

مباشرة نجد "$\infty - \infty$" وهو (ش.غ.م).

ولدينا : $x \to +\infty$ اذا : $x > 0$ و :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}} - 5x = \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}} - 5\right)$$

$$= "+\infty \times (1-4)" = \boxed{-\infty}$$

اذا :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+4} - 5x = \boxed{-\infty}$$

حساب :

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{x-9}$$

مباشرة نجد : "$\frac{0}{0}$" (ش.غ.م)

$$\frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{x-9} = \frac{\sqrt[3]{3x}^3 - 3^3}{(x-9)\left(\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 3^2\right)}$$

$$= \frac{3x - 27}{(x-9)\left(\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 9\right)}$$

$$= \frac{3(x-9)}{(x-9)\left(\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 9\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{3x}^2 + 3\sqrt[3]{3x} + 9}$$

اذا :

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt[3]{3x} - 3}{x-9} = \frac{3}{9+9+9} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

2° نبسط B :

$$B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt{4}}{\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[2]{\sqrt[3]{16}} \times 2}{\sqrt[3]{4^3} + \sqrt[3]{9 \times 3}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2^4} \times 2}{4 + \sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \times 2}{7} = \boxed{\frac{2}{7}\sqrt[3]{4}}$$

3° G دالة أصلية للدالة :

$$g : x \mapsto 7x^6 - 8x^3 + 3x - 1$$

اذا :

$$G(x) = \frac{7}{7}x^7 - \frac{8}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + k$$

حيث $(k \in \mathbb{R})$ ، نجد :

$$G(x) = x^7 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + k$$

بما أن : $G(1) = \frac{3}{4}$ فإن :

$$1 - 2 + \frac{3}{2} - 1 + k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{-4+3}{2} + k = \frac{3}{4}$$

اذا : $k = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ نجد : $k = \frac{5}{4}$

وبالتالي :

$$\boxed{G(x) = x^7 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{5}{4}}$$

تمرين 2: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

1° - أ) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x(x-4) \geq 0$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x(x-4)$		+	0	−	0	+	

اذا :

$$\boxed{D_f =]-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[}$$

1° - ب) لدينا : $\lim_{x \to -\infty} x^2 - 4x = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

اذا :

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty$$

ومنه :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

بالمثل نجد :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

2° - أ) ق.ش f في 4 على اليمين :

لدينا : $f(4) = 0$ و :

$$\frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-4} = \frac{x^2 - 4x}{(x-4)\sqrt{x^2-4x}}$$

$$= \frac{x(x-4)}{(x-4)\sqrt{x^2-4x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{4}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

اذا : f غير ق.ش في 4 على اليمين.

تأويل هندسي : (C_f) يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى ↑ في النقطة ذات الأفصول 4.

2-ب) قابلية اشتقاق f في 0 على اليسار:

لدينا: $f(0)=0$ و:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x} = \frac{x(x-4)}{x\sqrt{x^2-4x}}$$

اذا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{-4}{0^+} = \boxed{-\infty}$$

f لا تقبل الاشتقاق في 0 على اليسار

تأويل هندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى ↑ في النقطة: $O(0,0)$

3°-أ) اذا كان $x \in D_f-\{0;4\}$ فإن: $x^2-4x>0$ اذا: f ق ش على $D_f-\{0;4\}$ و:

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x)'}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$$

3-ب) $f'(x)$ و $(x-2)$ لهما نفس الاشارة:

جدول إشارة f'

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$			0		$+$		
$f'(x)$		$-$	‖	//////		//////	‖	$+$	

اذن جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖ $(+\infty)$	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$

4-أ) المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و: $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x}}$

بما أن $x\to+\infty$ فإن $x>0$ اذا: $|x|=x$

ومنه $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ اذا:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{4}{x}} = \boxed{1} = a$$

نحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$ لدينا:

$$f(x)-ax = f(x)-x = \sqrt{x^2-4x} - x$$

$$= \frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x}$$

$$= \frac{-4x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x} = \frac{-4x}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)}$$

اذا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1} = \frac{-4}{2} = -2 = b$$

اذا: $y = x-2$ هي معادلة المقارب المائل لـ: $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

4-ب) معادلة المقارب المائل بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x}}$$

$|x| = -x$ لأن: $x\to-\infty$

اذا:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{4}{x}} = -1 = a$$

نحسب: $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)$

لدينا:

$$f(x)-ax = \sqrt{x^2-4x} + x$$

$$= \frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x} - x}$$

$$= \frac{-4}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}} - 1}$$

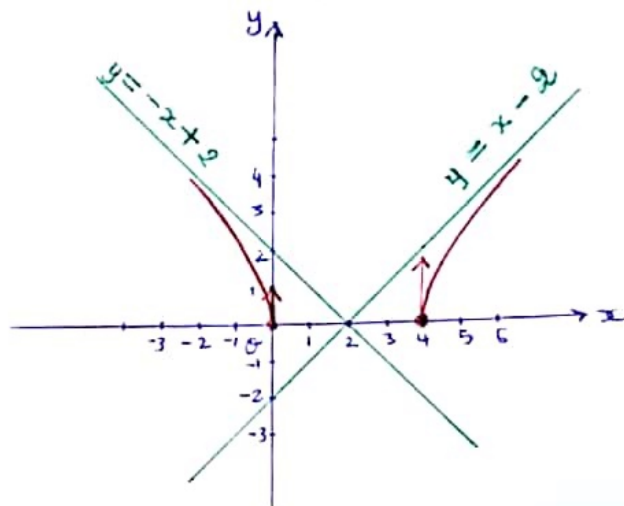
اذا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right) = \frac{-4}{-2} = 2 = b$$

3

معادلة المقارب المائل بجوار $-\infty$ هي: $y = -x + 2$

/5°) انشاء $(\mathcal{C}_f)$:



/6°) g قصور f على $I = [4, +\infty[$

يعني أن:

$\forall x \in [4, +\infty[\quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

6°_أ) $x \mapsto x^2 - 4x$ متصلة وموجبة على I

اذن g متصلة على I،

g تزايدية قطعا على المجال $[4, +\infty[$

اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال $J = g(I)$ نحدد J.

6°_ب) حساب $g(5)$:

$$g(5) = \sqrt{25 - 20} = \boxed{\sqrt{5}}$$

حساب $g'(5)$:

$$g'(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

اذن:

$$g'(5) = \frac{5 - 2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{5}}}$$

6°_ج) لدينا:

$\boxed{x_0 = \sqrt{5}}$

$$(g^{-1})'(\sqrt{5}) = (g^{-1})'(x_0)$$

$$= \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}$$

$$= \frac{1}{g'(g^{-1}(\sqrt{5}))}$$

بما أن: $g(5) = \sqrt{5}$ فإن: $5 = g^{-1}(\sqrt{5})$

ومنه:

$$g'(g^{-1}(\sqrt{5})) = g'(5) = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

اذن:

$$\boxed{(g^{-1})'(5) = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

ثانوية الليمون
ثانية باك علوم

واجب محروس رقم 2 - الدورة الأولى
قسم : PC2 [2k]

2020
2021

(A)

تمرين 1 (3pts)

1ن 1° قارن العددين : $\sqrt[4]{5}$ و $\sqrt[8]{23}$

1ن 2° بسط التعبير : $A = \dfrac{\left(\sqrt{\sqrt{a}}\sqrt[3]{a^2}\right)^5 \times \sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^{24}}}$ (حيث $a > 0$)

1ن 3° نعتبر الدالة : $g : x \longmapsto 6x^8 - 6x^5 + 6$ و G دالتها الأصلية
التي تحقق $G(1) = \dfrac{2}{3}$.
أوجد تعبير الدالة G .

تمرين 2 (17pts)

f دالة عددية معرفة بصيغتها : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

2ن 1/ تحقق أن: $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ ثم أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

1ن 2 - أ) ادرس ق.ش f في 1 على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

1ن 2 - ب) أدرس ق.ش f في 1- على اليسار ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

1ن 3 - أ) بين أن : $(\forall x \in D_f - \{-1 ; 1\})$; $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1ن 3 - ب) برهن أن $(\forall x < -1)$; $f'(x) < 0$

1ن 3 - ج) استنتج تغيرات f على مجموعة تعريفها .

2ن 4 - أ) أكتب معادلة المقارب الأفقي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

2ن 4 - ب) حدد الفرع اللانهائي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(+\infty)$.

2ن 5/ أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

6/ لتكن g قصور الدالة f على المجال : $I = [1, +\infty[$

1ن 6 - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J .

1ن 6 - ب) أحسب : $g'(\sqrt{2})$ ،

2ن 6 - ج) بين أن g^{-1} ق.ش في : $g(\sqrt{2})$ ثم أحسب : $(g^{-1})'(g(\sqrt{2}))$.

ثانوية الليمون / تصحيح الواجب رقم 2 دورة 1

قسم: 2 ف د [فوج: 2k]



تمرين 1:

1°/ نقارن: $\sqrt[4]{5}$ و $\sqrt[8]{23}$

لدينا: $\sqrt[4]{5} = \sqrt[2\times 4]{5^2} = \sqrt[8]{25}$

بما أن: $23 < 25$ فإن: $\sqrt[8]{23} < \sqrt[8]{25}$

إذا: $\sqrt[8]{23} < \sqrt[4]{5}$

2°/ نبسط A: (حيث $a>0$)

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^{24}}} = \frac{\sqrt[4]{a}\ \sqrt[3]{a^{10}}\ \sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^{24}}}$$

$$= a^{\frac14+\frac{10}{3}+\frac14-\frac{24}{3}} = a^{\frac24+\frac{10}{3}-8}$$

$$= a^{\frac{46}{12}-8} = a^{\frac{23}{6}-8} = a^{-\frac{25}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{25}{6}}}$$

بما أن: $25 = 6\times 4 + 1$

فإن: $a^{\frac{25}{6}} = a^{4+\frac16} = a^4\sqrt[6]{a}$

إذا: $A = \frac{1}{a^4\sqrt[6]{a}}$

3°/ لتكن G دالة أصلية للدالة g بحيث:

$g(x) = 6x^8 - 6x^5 + 6$

إذا: $G(x) = \frac69 x^9 - \frac66 x^6 + 6x + k$ حيث $(k\in\mathbb{R})$

أي: $G(x) = \frac23 x^9 - x^6 + 6x + k$

بما أن: $G(1) = \frac23$

فإن: $\frac23 - 1 + 6 + k = \frac23$

$\iff -1+6+k=0 \iff 5+k=0$

إذا: $k=-5$ و:

$$G(x) = \frac23 x^9 - x^6 + 6x - 5$$

تمرين 2:

$f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

1°/ $D_f = \{x\in\mathbb{R} \ ; \ x^2-1 \geq 0\}$

$x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0$

$\iff (x=1$ أو $x=-1)$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

إذا: $D_f =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

حساب: $\lim\limits_{+\infty} f$: بما أن:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1 = +\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$

حساب $\lim\limits_{-\infty} f$: مباشرة نجد: "$-\infty+\infty$"

ولدينا:

$$x+\sqrt{x^2-1} = \frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = "-\infty-\infty" = -\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = "\frac{1}{-\infty}" = 0$

2-أ) قابلية اشتقاق f في 1 على اليمين:

لدينا: $f(1)=1$ و:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}$$

$$= 1+\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} \quad (x-1>0 \text{ لأن:})$$

$$= 1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x+1}{x-1} = "\frac{2}{0^+}" = +\infty$ فإن:

$$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

إذا:

f غير قابلة للاشتقاق في 1 على اليمين.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول 1

2

2 - ب) ق.ش f في -1 على اليسار:

لدينا: $f(-1) = -1$ و

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}-(-1)}{x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

بما أن:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \text{"}\frac{-2}{0^+}\text{"} = -\infty$$

فإن:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \text{"}1+(-\infty)\text{"} = -\infty$$

اذن: f غير ق.ش في -1 على اليسار.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول -1.

3 - أ) اذا كان $x \in D_f - \{-1;1\}$ فإن $x^2-1>0$

وبالتالي f ق.ش على $D_f - \{-1;1\}$

ولدينا:

$$f'(x) = (x+\sqrt{x^2-1})' = 1+\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \boxed{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}$$

3 - ب) نبرهن أن: $(\forall x<-1);\ f'(x)<0$

نستعمل البرهان بالتكافؤ: ليكن $x<-1$

لدينا:

$$f'(x)<0 \iff 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0$$

$$\iff 1<\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} \iff \sqrt{x^2-1}<-x$$

$$\iff \sqrt{x^2-1}^{\,2}<(-x)^2 \quad \text{(لأن الطرفين موجبين)}$$

$$\iff x^2-1<x^2 \iff -1<0$$

وهذا صحيح (العبارة $-1<0$ صحيحة)

اذن العبارة: $f'(x)<0$ صحيحة لكل x من المجال $]-\infty;-1[$

(ملاحظة: $x<-1 \Rightarrow -x>0$)

3 - ج) مما سبق لدينا: $\forall x<-1\ f'(x)<0$

وبما أن: f' موجبة على $]1,+\infty[$ فإن تغيرات f نلخصها في الجدول:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖ $(+\infty)$	$+$	
f	0	↘	-1 ‖	//////	‖ 1	↗	$+\infty$

4 - أ) نعلم أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (سؤال 1)

اذن: **$y=0$ هي معادلة المقارب الأفقي** لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

4 - ب) نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 1+\sqrt{1} = \boxed{2}$$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$)

ولدينا:

$$f(x)-2x = x+\sqrt{x^2-1}-2x$$

$$= \sqrt{x^2-1}-x = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

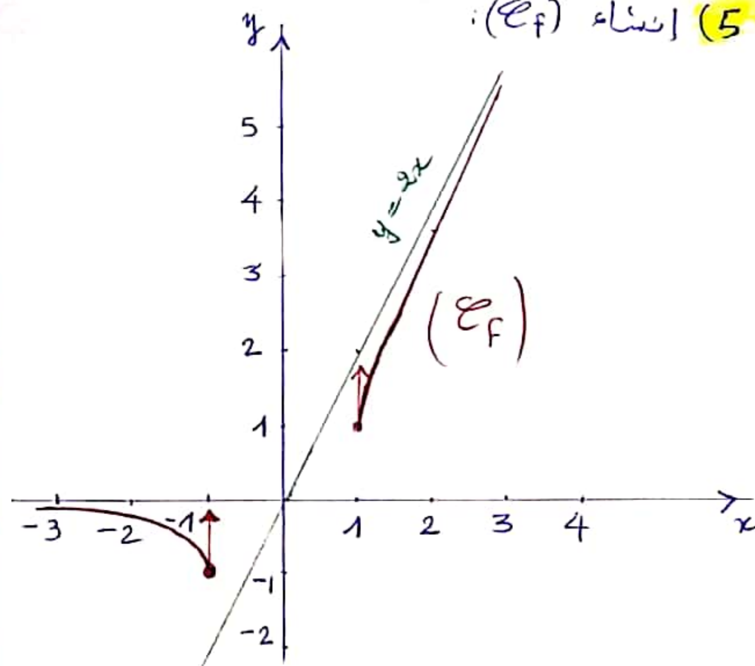
اذن:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-2x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \text{"}\frac{-1}{+\infty}\text{"} = \boxed{0}$$

نستنتج أن (C_f) يقبل فرعا لانهائيا بجوار $+\infty$ معادلة مقاربه المائل هي: $y = 2x$

5) إنشاء $(\mathcal{C}_f)$:



6) g قصور f على $I=[1,+\infty[$ يعني أن:

$$(\forall x\in[1,+\infty[);\quad g(x)=x+\sqrt{x^2-1}$$

6-أ) الدالة: $x\mapsto x^2-1$ متصلة وموجبة على المجال I.

إذا: $x\mapsto\sqrt{x^2-1}$ متصلة على I.

ومنه: $g: x\mapsto x+\sqrt{x^2-1}$ متصلة على المجال I (لأنها مجموع دالتين متصلتين على I)

وبما أن g تزايدية قطعا على I فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال: $J=g(I)$.

6-ب) لدينا: $g'(x)=f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

إذا: $g'(\sqrt2)=1+\frac{\sqrt2}{\sqrt{2-1}}=\boxed{1+\sqrt2}$

6-ج) نطبق الخاصية:

$$(g^{-1})'(g(\sqrt2))=\frac{1}{g'(\sqrt2)}$$

نعلم أن $g'(\sqrt2)=1+\sqrt2\neq0$ إذا g^{-1} ق.ش في $g(\sqrt2)$ ولدينا:

$$(g^{-1})'(g(\sqrt2))=\frac{1}{g'(\sqrt2)}=\frac{1}{1+\sqrt2}=\boxed{\sqrt2-1}$$

ثانوية الليمون
ثانية باك علوم

◂ واجب محروس رقم 2 - الدورة الأولى
◂ قسم : PC 2[2k]

2020
2021

B

تمرين 1 (3pts)

1ن — 1° قارن العددين : $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[9]{26}$.

1ن — 2° ليكن : $b>0$ ، بسط التعبير : $B=\dfrac{(\sqrt[5]{b})^2\times\sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt[20]{b^3}}$

1ن — 3° نعتبر الدالة : $h : x \mapsto 7x^6-8x^5+4x-1$ و H دالتها الأصلية التي تحقق : $H(1)=-\dfrac{4}{3}$. أوجد تعبير الدالة H .

تمرين 2 (17pts)

f دالة عددية معرفة بصيغتها : $f(x)=x+2\sqrt{x^2-1}$.

2ن — 1/ تحقق أن : $D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

1ن — 2 - أ) أدرس قاش f في 1 على اليمين ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

1ن — 2 - ب) أدرس قاش f في -1 على اليسار ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

1ن — 3 - أ) بين أن : $(\forall x\in D_f-\{-1;1\})$; $f'(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

1ن — 3 - ب) برهن أن : $(\forall\ x<-1)$; $f'(x)<0$.

1ن — 3 - ج) ضع جدول تغيرات f على D_f .

2ن — 4 - أ) تحقق أن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا لانهائيا مقاربه المستقيم الذي معادلته : $y=3x$ بجوار $(+\infty)$.

2ن — 4 - ب) حدد الفرع اللانهائي لـ: $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

2ن — 5/ أرسم $(\mathscr{C}_f)$.

6/ لتكن g قصور الدالة f على المجال : $I=[1;+\infty[$.

1ن — 6 - أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J .

1ن — 6 - ب) أحسب $g'(\sqrt{2})$.

2ن — 6 - ج) بين أن g^{-1} ق.ش في $g(\sqrt{2})$ ثم أحسب : $(g^{-1})'(g(\sqrt{2}))$.

تمرين 1:

1°) نقارن $\sqrt[9]{26}$ و $\sqrt[3]{3}$

لدينا: $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\times3]{3^3} = \sqrt[9]{27}$

بما أن $26 < 27$ فإن: $\sqrt[9]{26} < \sqrt[9]{27}$

إذن: $\boxed{\sqrt[9]{26} < \sqrt[3]{3}}$

2°) (ليكن: $b>0$) نبسط:

$$B = \frac{(\sqrt[5]{b})^2 \times \sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt[20]{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{b^2}\ \sqrt[4]{b^1}}{\sqrt[20]{b^3}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{20}}}$$

$$= \frac{b^{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{20}}} = b^{\frac{8+5}{20}-\frac{3}{20}} = b^{\frac{10}{20}} = b^{\frac{1}{2}}$$

إذن: $\boxed{B = \sqrt{b}}$

3°) H دالة أصلية للدالة:

$h : x \mapsto 7x^6 - 8x^5 + 4x - 1$

إذن: $H(x) = \frac{7}{7}x^7 - \frac{8}{6}x^6 + \frac{4}{2}x^2 - x + k$

(حيث: $k \in \mathbb{R}$) ومنه:

$H(x) = x^7 - \frac{4}{3}x^6 + 2x^2 - x + k$

بما أن: $H(1) = -\frac{4}{3}$ فإن:

$1 - \frac{4}{3} + 2 - 1 + k = -\frac{4}{3}$

أي $2 + k = 0$ نجد: $k = -2$

ومنه: $\boxed{H(x) = x^7 - \frac{4}{3}x^6 + 2x^2 - x - 2}$

تمرين 2:

$f(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 1}$

/1 $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 1 \geq 0\}$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

إذن: $x^2 - 1 = 0 \iff (x = 1$ أو $x = -1)$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

وبالتالي: $\boxed{D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[}$

حساب $\lim_{+\infty} f$: مباشرة نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 2\sqrt{x^2-1} = +\infty$$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$)

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: مباشرة نجد: "$-\infty + \infty$" وهو (ش.ع.م).

ولدينا:

$$f(x) = x + 2|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= x - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x\left(1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \text{"}-\infty \times (1-2)\text{"} = \text{"}-\infty \times (-1)\text{"} = \boxed{+\infty}$$

2-أ) ق.ش f في 1 على اليمين:

لدينا: $f(1) = 1$ ولكل $x > 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x + 2\sqrt{x^2-1} - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{x-1}{x-1} + 2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 1 + \frac{2(x^2-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1 + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

إذن:

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} 1 + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \text{"}1 + \frac{4}{0^+}\text{"} = \boxed{+\infty}$$

إذن: f غير ق.ش في 1 على اليمين.

تأويل هندسي: (C_f) يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول 1.

2-ب) ق.ش f في -1 على اليسار:

لدينا: $f(-1) = -1$ ولكل $x < -1$:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{x + 2\sqrt{x^2-1} + 1}{x + 1}$$

$$= \frac{x+1}{x+1} + 2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 1 + \frac{2(x^2-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 1 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

إذن:

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} 1 + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \text{"}1 + \frac{-4}{0^+}\text{"} = \boxed{-\infty}$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق في -1 على اليسار.

تأويل هندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول -1.

3-أ) لكل x من $D_f-\{-1;1\}$ لدينا: $x^2-1>0$ إذن f ق.ش على $D_f-\{-1;1\}$

ولدينا:

$$f'(x)=\left(x+2\sqrt{x^2-1}\right)'$$

$$=1+2\times\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}=1+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

3-ب) نبرهن أن: $(\forall x<-1);\ f'(x)<0$

نستعمل البرهان بالتكافؤ: لكل $x<-1$ لدينا:

$$f'(x)<0 \iff 1+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}<0$$

$$\iff 1<\frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\iff \sqrt{x^2-1}<-2x \iff x^2-1<(-2x)^2$$

$$\iff x^2-1<4x^2 \iff -1<3x^2$$

بما أن العبارة $(-1<3x^2)$ صحيحة

فإن: العبارة $f'(x)<0$ صحيحة.

ملاحظة: (بما أن: $x<-1$ فإن x سالب إذن: $-2x$ موجب.)

3-ج) حسب السؤال (3-ب) f' سالبة على المجال $]-\infty;-1[$ ومن خلال تعبيرها $f'(x)$ نلاحظ أنها موجبة على المجال $]1,+\infty[$ إذن:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$ ‖	//////	‖ $+\infty$	$+$	
f	$+\infty$	↘	-1	//////	1	↗	$+\infty$

4-أ) نعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x)\right)$ لدينا:

$$f(x)-3x=2\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$=2\,\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=2\,\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\text{"}\frac{-2}{+\infty}\text{"}=\boxed{0}$

إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا لانهائيا مقاربه المستقيم الذي معادلته: $y=3x$ بجوار $(+\infty)$.

4-ب) نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. لدينا:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x+2\sqrt{x^2-1}}{x}=1+2\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$=1+2\,\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

(إذا $x\to-\infty$ فإن $x<0$ ومنه: $|x|=-x$)

وبالتالي:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$=1-2\times\sqrt{1}=\boxed{-1}$$

نحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2\sqrt{x^2-1}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

ولدينا:

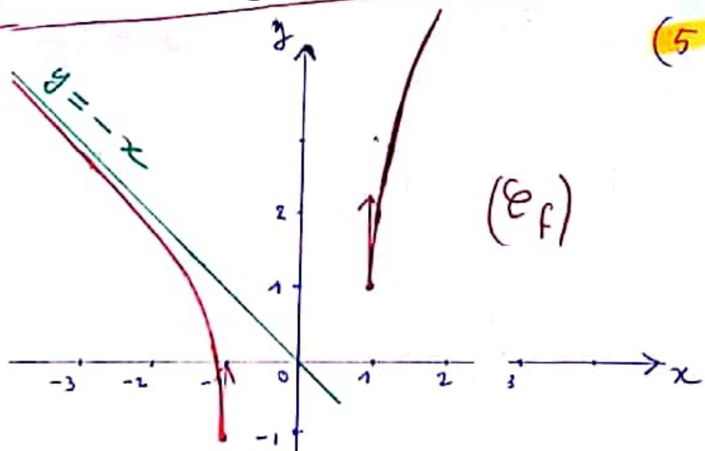
$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

إذن:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\text{"}\frac{1}{-\infty}\text{"}=\boxed{0}$$

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا لانهائيا بجوار $(-\infty)$ مقاربه المائل هو المستقيم ذو المعادلة: $y=-x$

5)



③

6) g قصور f على المجال $I = [1, +\infty[$

يعني أن: $(\forall x \in [1, +\infty[)\ g(x) = x + 2\sqrt{x^2-1}$

6-أ) الدالة: $x \mapsto x^2 - 1$ متصلة وموجبة على I إذن: $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ متصلة على I.

وبالتالي g دالة متصلة على I (لأنها مجموع دالتين متصلتين)

وبما أن g تزايدية قطعا على I فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال: $J = g(I)$،

6-ب) نعلم أن: $g'(x) = 1 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

إذن: $g'(\sqrt{2}) = 1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-1}} = \boxed{1+2\sqrt{2}}$

6-ج) نطبق الخاصية: $(g^{-1})'(g(\sqrt{2})) = \dfrac{1}{g'(\sqrt{2})}$

لدينا: g' ق.ش في $\sqrt{2}$،

و $g'(\sqrt{2}) \neq 0$

إذن: g^{-1} ق.ش في $g(\sqrt{2})$

و: $(g^{-1})'(g(\sqrt{2})) = \dfrac{1}{g'(\sqrt{2})} = \boxed{\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}}}$

* * *

ملاحظة: $\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{1-2\sqrt{2}}{1-8} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}$



2020 2021 (A)	واجب محروس رقم: 2 / دورة: 1 — 2PC3 [2k+1]	ثانوية الليمون — مستوى: ثانية باك علوم

التمرين الأول (4ن)

1ن — 1° أحسب النهايتين: $\lim_{x \to +\infty} 7x - \sqrt[3]{x^3+5x}$ و $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{x-3}$

1ن

1ن — 2° قارن العددين: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[5]{5}$

1ن — 3° بسط التعبير: $A = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{\sqrt{9}}}{\sqrt[3]{81} \times \sqrt{2}}$

التمرين الثاني (16ن)

لتكن f دالة معرفة كما يلي: $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$

2ن — 1° تحقق أن $D_f =]-\infty ; \frac{1}{2}]$ ثم أحسب: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2ن — 2° أدرس قابلية اشتقاق f في $\frac{1}{2}$ على اليسار، ثم أعط تأويلا هندسيا .

1ن — 3° تحقق أن: $(\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{2}[) ; \quad f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$

2ن — 4° ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f ثم حدد مطارف الدالة f .

1ن — 5° اعط معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول 0 .

2ن — 6° حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

2ن — 7° أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

1ن — 8° أثبت أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو D_f

1ن — 9° حدد المجال J .

1ن — 10° أحسب $f(0)$ ثم استنتج أن f^{-1} ق.ش في 1 .

1ن — 11° تحقق أن: $(f^{-1})'(1) = -\frac{3}{2}$

— انتهى —

تذكير: $(\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

معادلة المماس في x_0: $(T): \ y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

ثانوية الليمون : تصحيح الواجب المحروس رقم 2

الدورة 1 . قسم : 3 فك [2k+1] — (A)

تمرين 1 : 1°) حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty} 7x-\sqrt[3]{x^3+5x}$$

مباشرة نجد : "$+\infty-\infty$" وهو (ش غ م) ،

ولدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} 7x-\sqrt[3]{x^3+5x} = \lim_{x\to+\infty} 7x-\sqrt[3]{x^3}\times\left(\sqrt[3]{1+\frac{5x}{x^3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(7-\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$= "+\infty\times(7-1)" = +\infty\times 6 = \boxed{+\infty}$$

(لأن : $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{5}{x^2} = 1+0 = 1$)

حساب النهاية :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x-3}$$

مباشرة نجد : "$\frac{0}{0}$" (ش غ م)

ولدينا :

$$\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x-3} = \frac{\sqrt[3]{9x}^{3}-3^3}{(x-3)\left(\sqrt[3]{9x}^{2}+3\sqrt[3]{9x}+3^2\right)}$$

$$= \frac{9x-27}{(x-3)\left((\sqrt[3]{9x})^2+3\sqrt[3]{9x}+9\right)}$$

$$= \frac{9(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt[3]{9x}^{2}+3\sqrt[3]{9x}+9\right)} = \frac{9}{\sqrt[3]{9x}^{2}+3\sqrt[3]{9x}+9}$$

اذن :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{9}{\sqrt[3]{9x}^{2}+3\sqrt[3]{9x}+9}$$

$$= \frac{9}{\sqrt[3]{27}^{2}+3\sqrt[3]{27}+9} = \frac{9}{9+9+9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2°) نقارن $\sqrt[5]{5}$ و $\sqrt[3]{2}$ ؛ لدينا :

$$\sqrt[5]{5} = \sqrt[3\times5]{5^3} = \sqrt[15]{125}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[5\times3]{2^5} = \sqrt[15]{32}$$

بما أن : $125 > 32$ فإن : $\boxed{\sqrt[5]{5} > \sqrt[3]{2}}$

3°) نبسط A .

$$A = \frac{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3^4}\times\sqrt{2}} = 2^{\frac{2}{3}}\times 3^{1/2}\times 3^{-4/3}\times 2^{-1/2}$$

$$= 2^{2/3-1/2}\; 3^{1/2-4/3}$$

(1)

$$A = 2^{\frac{4-3}{6}}\times 3^{\frac{3-8}{6}} = 2^{\frac{1}{6}}\times 3^{-\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{3^5}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3\times 81}} = \boxed{\sqrt[6]{\frac{2}{243}}}$$

تمرين 2 :

1°)

$$f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$$

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} \,/\, 1-2x\geqslant 0\}$$

$$1-2x\geqslant 0 \iff 1\geqslant 2x \iff \frac{1}{2}\geqslant x$$

اذن :

$$\boxed{D_f = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]}$$

حساب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} 1-2x = +\infty$$

اذن :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-2x} = \boxed{+\infty}$$

2°) ق.ش f في $\frac{1}{2}$ على اليسار :

لدينا : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{1-2\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt[3]{0} = 0$

ولكل $x<\frac{1}{2}$:

$$\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{1-2x}}{x-1/2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1-2x}\times\sqrt[3]{(1-2x)^2}}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \frac{1-2x}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{-2(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

اذن :

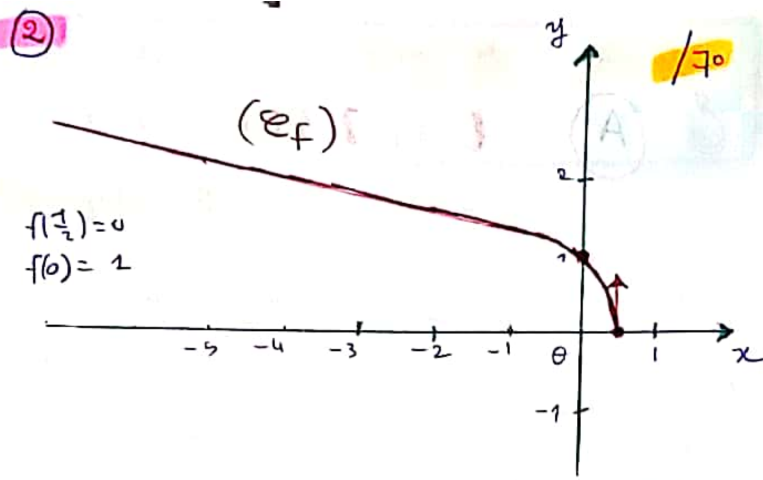
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{-2}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{-2}{0^+} = \boxed{-\infty}$$

اذن f غير ق.ش في $\frac{1}{2}$ على اليسار

تأويل هندسي : $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول $\frac{1}{2}$

②



/8° $x \mapsto 1-2x$ متصلة وموجبة على D_f.

اذن f متصلة على D_f و بما أنها تناقصية قطعا فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $J = f(D_f)$

/9° $J = f(]-\infty ; \frac{1}{2}]) = [f(\frac{1}{2}) ; \lim_{-\infty} f[$

$$\boxed{J = [0 ; +\infty[}$$

/10° $f(0) = \sqrt[3]{1} = 1$

لكي تكون f^{-1} قابلة للاشتقاق في 1 ينبغي أن يكون للعبارة : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$ معنى.

نعلم أن : $f(0) = 1$ اذن : $0 = f^{-1}(1)$

ومنه : $f'(f^{-1}(1)) = f'(0)$

ولدينا : f قابلة للاشتقاق في 0 و $f'(0) = -\frac{2}{3}$

(حسب السؤال 1^5) اذن :

بما أن : $f'(0) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في 1.

/11° لدينا :

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

$$= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(-\frac{2}{3})} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

——— * * * ———

/3° اذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن : $1-2x > 0$

اذن : f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ ولدينا :

$$(\forall x < \tfrac{1}{2}) : \quad f'(x) = \frac{(1-2x)'}{3\sqrt[3]{(1-2x)^{3-1}}}$$

$$= \boxed{\frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}}$$

/4° بما أن : $f'(x) < 0$ لكل $x < \frac{1}{2}$ فإن : f تناقصية قطعا على D_f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $1/2$
$f'(x)$	$-$ $\qquad$ $(-\infty)$ ‖
f	$+\infty$ ↘ 0

نلاحظ أن العدد : $0 = f(\frac{1}{2})$ هو مطراف للدالة f (قيمة دنوية لـ : f على D_f).

لأن : $(\forall x \in D_f), \quad f(x) \geq f(\frac{1}{2})$

/5° $(T) : \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

اذا كان : $x_0 = 0$ فإن : $f(0) = \sqrt[3]{1} = 1$

ولدينا : $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ اذن : $f'(0) = \frac{-2}{3}$

وبالتالي :

$$\boxed{(T) : \quad y = -\frac{2}{3}x + 1}$$

/6° نعلم أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (سؤال 1°/)

ولدينا $x \to -\infty$ اذن : $x < 0$ ومنه : $-x > 0$

اذن : $-x = \sqrt[3]{-x^3}$

وبالتالي :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{1-2x}}{-(-x)} = \frac{\sqrt[3]{1-2x}}{-\sqrt[3]{-x^3}}$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{1-2x}{-x^3}}$$

بما أن : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-2x}{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2}$

$= 0$

فإن : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\sqrt[3]{0} = 0$

وهذا يعني أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$.

ثانوية : الليمون مستوى : ثانية باك علوم	واجب محروس رقم: 2 / دورة: 1 2PC3 [2k+1]	2020 2021 B 

التمرين الأول: (4)

2ن — 1°) أحسب النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} 5x-\sqrt[3]{x^3+x}$ و $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2}-2}{x-2}$

1ن — 2°) قارن العددين: $\sqrt[3]{4}$ و $\sqrt[5]{5}$.

1ن — 3°) بسط التعبير:

$$B=\frac{\sqrt{\sqrt{4}}\times\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{32}\times\sqrt{27}}$$

التمرين الثاني: (16)

نعتبر الدالة f بحيث: $f(x)=\sqrt[3]{1-4x}$

2ن — 1°/ تحقق أن: $D_f=]-\infty;\frac{1}{4}]$ ثم احسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2ن — 2°/ أدرس قابلية اشتقاق f في $\frac{1}{4}$ على اليسار ثم أعط تأويلا هندسيا.

1ن — 3°/ تحقق أن: $(\forall x\in]-\infty;\frac{1}{4}[)$; $f'(x)=\dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1-4x)^2}}$

2ن — 4°/ ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f ثم حدد مطارفها.

1ن — 5°/ اعط معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول 0.

2ن — 6°/ حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

2ن — 7°/ أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

1ن — 8°/ أثبت أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو D_f .

1ن — 9°/ حدد المجال J .

1ن — 10°/ أحسب $f(0)$ ثم استنتج أن f^{-1} ق.ش في 1 .

1ن — 11°/ تحقق أن:

$$(f^{-1})'(1)=-\frac{3}{4}$$

— * انتهى * —

تذكير: $\left(\sqrt[3]{u}\right)'=\dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

معادلة المماس في x_0 :

$(T):\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\cdot\ (f^{-1})'(x_0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$